スターリングエンジンの理想等温モデル解析入門

小林義行

1　Ideal Isothermal Model理想等温モデル

作動ガスの瞬間圧力をＰ、作動ガスの瞬間体積をＶ、位相（またはクランク角）をθとすると、エンジンの１サイクルによって気体が外部に対する仕事は次式のように表せる。

$$W = \oint P dV = \oint P \frac{dV}{d\theta} d\theta \qquad (1-1)$$

したがって、圧力と体積がθの関数として得られれば、１サイクルの気体の仕事（図示仕事）が計算できる。

理想等温モデルでは次のような理想的な条件を仮定する。

(1)各空間内の内部気体が理想気体の状態方程式にしたがう。

$$PV_i = M_i RT \qquad (1-2)$$

(2)瞬間圧力は各空間のすべての点で同じである。つまり圧力損失がゼロとする。

(3)高温空間、低温空間の気体温度はそれぞれ常に一定に保たれる。

(4)熱再生器の性能は理想的であり、熱再生器内の空間は直線的な温度勾配を持つ。

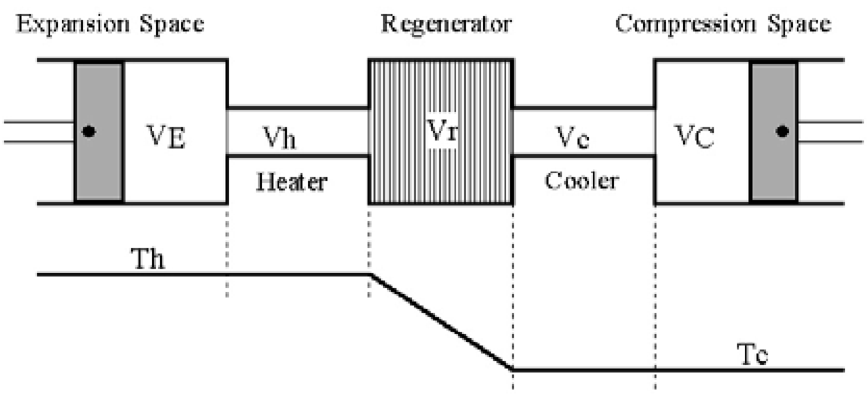

Fig.1-1　Volumes and Temperature

状態方程式（1-2）より、全気体質量は (1-3)式で表される。各質量に(1-2)を代入して、圧力は式(1-４)のように表される。

$$M = \Sigma M_i \qquad (i = E, h, r, c, C) \qquad (1-3)$$

$$P = MR\left(\frac{V_E}{T_h} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_r ln(T_h/T_c)}{(T_h - T_c)} + \frac{V_c}{T_c} + \frac{V_C}{T_c}\right)^{-1} \qquad (1-4)$$

2　Schmidt modelシュミットモデル

いくつかのエンジンでは各空間の体積 V_i が次の(2-1)のように三角関数の一次式で表せる。また、他の多くのエンジンでは近似的にこの関係が成り立つ。

$$V_E = v_E(x_E + \frac{1-cos\theta}{2}) \qquad (2-1a)$$

$$V_C = v_C(x_C + \frac{1-cos(\theta-\beta)}{2}) \qquad (2-1b)$$

ここで、v_E と v_C は膨張空間と圧縮空間の各行程容積、βは位相角である。x_E、x_C は無効容積率であり、無効容積を行程容積で割ったものである。

式（2-1）を（1-4）に代入して圧力を求めると、圧力は次式で表される。

$$P = P_m\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{1-\delta cos(\theta-\phi)} \qquad (2-2)$$

ここで、Pm は平均圧力であり、δ、φは　温度比 $\tau = T_c/T_E$ 、行程容積比　$\kappa = v_E/v_C$、および各空間の死容積から求められる数である。

$$\phi = tan^{-1}\frac{\kappa sin\beta}{\tau + \kappa cos\beta}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2+2\kappa\tau cos\beta}}{\zeta}$$

$$\zeta = \frac{\kappa+\tau+4\tau\kappa_D}{1+\tau}$$

$$\kappa_D = \frac{1+\tau}{2v_E}(x_E v_E + V_h + \frac{V_r ln\tau}{\tau-1} + \frac{V_c + x_C v_C}{\tau})$$

式(2-1)と式(2-2)からＰ－Ｖ線図を描くことができる。(描画の例 Fig.2.1)

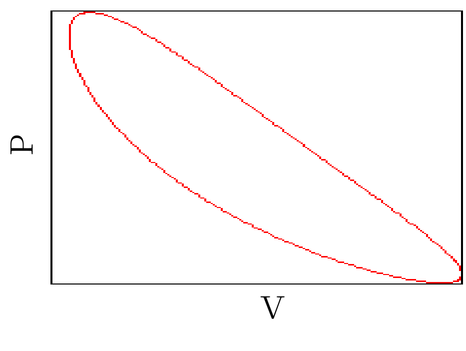

Fig.2.1　P-V diagram of Schmidt model

式(2-2)を（1-1）式に代入して積分すると、図示仕事が次のように得られる。

$$W = \frac{\pi\kappa(1-\tau)sin\beta}{\zeta(1+\sqrt{1-\delta^2})}P_m v_E \qquad (2-4)$$

3　Numerical Calculation of Ideal Isothermal Model理想等温モデルでの数値計算

一般に体積変化が三角関数の一次式で表されない場合は容易に積分できない。その場合、数値計算によって図示仕事等を求めることができる。

例として、SECD（Stirling Engine with Colliding Displacer）の P-V 線図と図示仕事を計算してみよう。SECD の内部体積の変化は Table3-1 のように表せる。

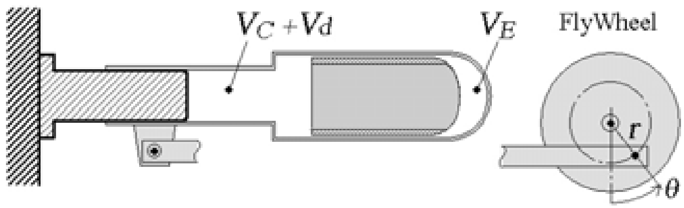

Fig.3-1 Volumes of SECD

Fig.3-2 にディスプレーサピストンの運動を示した。SECDのディスプレーサはシリンダ端に衝突するが、その時のクランク角を　$\theta=\theta_1$　とする。衝突角θ_1は次の式によって求められる。

$$\theta_1 - \sin\theta_1 = d / r = 2s \qquad (3\text{-}1)$$

ここで、dはシリンダ内におけるディスプレーサのストロークであり、rはピストンストローク、つまりフライホィールのクランク半径である。ここで　$s = d / 2r$　をストローク比と定義した。Fig.3-3 で見られるように、SECDの体積変化は正弦波的ではない。各空間の体積変化を表 3-1 に示した。表においてA_d，A_p はそれぞれディスプレーサと出力ピストンの断面積であり、$c = A_d / A_p$ を断面積比とする。

ただし、簡単のため、熱再生器の体積を無視しよう。(V_r=0)　また、膨張空間の死容積と加熱器の体積もゼロとする。(x_E=0, V_h=0)

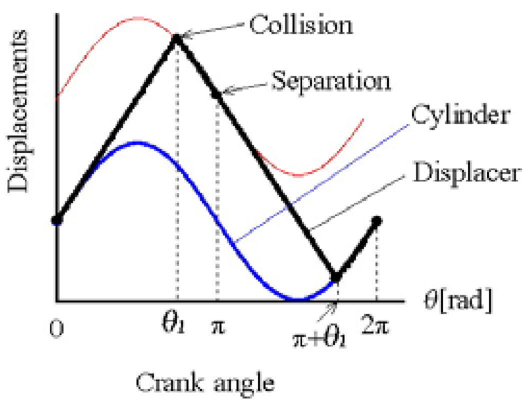

Fig.3-2 Displacements

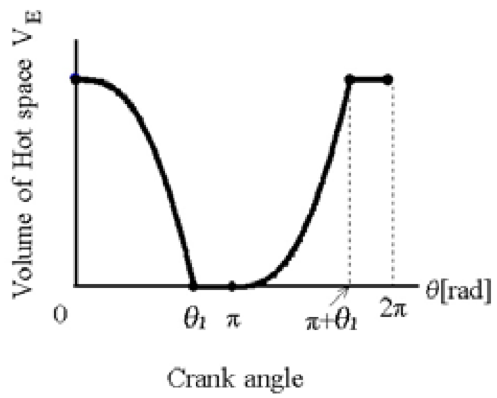

Fig. 3-3 variation of V_E

Table 3-1 Volume variation of SECD

θ	Vc	Vh
0 ~ θ_1	$A_p r (1+c\theta - (c-1)\sin\theta)$	$A_p r c (2s-\theta + \sin\theta)$
θ_1 ~ π	$A_p r (1+2cs + \sin\theta)$	0
π ~ $\pi+\theta_1$	$A_p r (1+2cs-e\theta+c\pi-(c-1)\sin\theta)$	$A_p r c (\theta-\pi + \sin\theta)$
$\pi+\theta_1$ ~ 2π	$A_p r (1+\sin\theta)$	$A_p r 2cs$

質量保存の式(1-3)に表 3-1 を代入して、圧力 P を求めると、次式が得られる。ただし、B は表 3-2 で与えられる無次元量である。

$$P = \frac{mRT_c}{A_p r} B \qquad (3\text{-}1)$$

Table 3-2 Nondimensional Pressure

θ	**1/*B***
0 ~ θ_1	$z + 1 + 2tcs + c(1-t)\ \theta + (1-c+t)\sin\theta$
θ_1 ~ π	$z + 1 + 2cs + \sin\theta$
π ~ $\pi+\theta_1$	$z + 1 + 2cs - c(1-t)(\theta-\pi) + (1-c+t)\sin\theta$
$\pi+\theta_1$ ~ 2π	$z + 1 + 2tcs + \sin\theta$

表 3-2 において $t = Tc/Th$ は温度比、$z = Vd/A_p r$ は無効空間容積比である。

Bの平均値B_mを次式で定義しよう。

$$B_m = \frac{1}{2\pi} \oint B d\theta \qquad (3\text{-}2)$$

平均圧力 Pm は次式で与えられる。

$$P_m = \frac{1}{2\pi} \oint P d\theta \qquad (3\text{-}3)$$

図示仕事は式(1-1)より、式(3-1)、(3-2)、(3-3)を用いることで求められる。図示仕事をピストン断面積とピストンストロークと平均圧力によって割った量を無次元仕事とすると、(3-4)で表される。

$$\frac{W_i}{A_p r P_m} = \frac{1}{B_m} \oint B d \sin\theta \qquad (3\text{-}4)$$

数値計算においては、位相を小さなきざみ⊿θに分割して合計することで値が得られるので、式(3-4)の積分は次式のようにして求めれば良い。

$$\frac{W_i}{A_p r P_m} = \frac{1}{B_m} \Sigma B \Delta \sin\theta \qquad (3\text{-}5)$$

１回の振動を 80 分割した場合の表計算ワークシート例を表 3.3 に示した。

Table 3.3 A worksheet for non-dimensional indicated work

No	θ	sinθ	B	B/Bm	B/Bm・⊿sinθ
1	0.000	0.000	0.376	1.216	0.095
2	0.079	0.078	0.366	1.182	0.092
3	0.157	0.156	0.355	1.149	0.088
	・・・				
78	6.048	−0.233	0.413	1.334	0.103
79	6.126	−0.156	0.400	1.293	0.101
80	6.205	−0.078	0.388	1.253	0.098
		Bm=	0.309	ΣB/Bm・⊿sinθ =	0.908

以上のようにして、エンジン形状から、いくつかのパラメータが決まれば、数値計算によって Fig.3.2 のように P-V 線図を描くことができる。図(3-3)にみられるように、エンジン形状によって P-V 線図の形状が特徴的に変化することがわかる。

図示仕事はワークシート上で数値として得られる。表 3.3 の例では 0.908 が無次元化図示仕事である。各パラメータを変化させれば、この値は変化する。図(3-4)は、この計算結果よりストローク比と図示仕事の関係を表したものである。無効容積比の値によって最適なストローク比が変化することがわかる。このように、数値計算の結果を利用して、エンジンの形状とエンジン性能の関係を検討することが出来る。

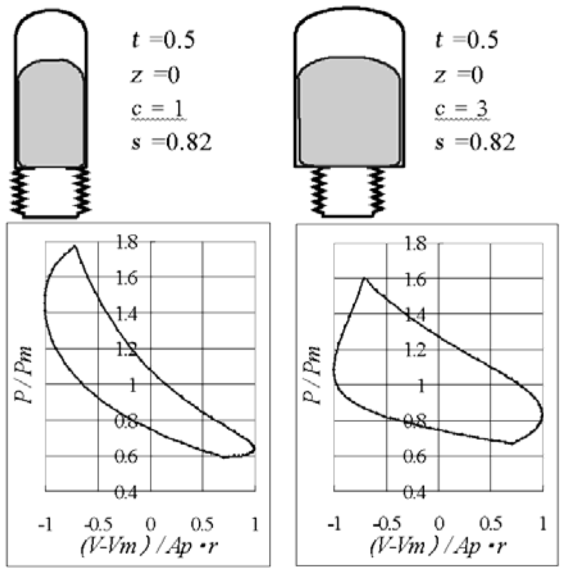

Fig.3-3 P-V diagrams as changing cross-section ratio

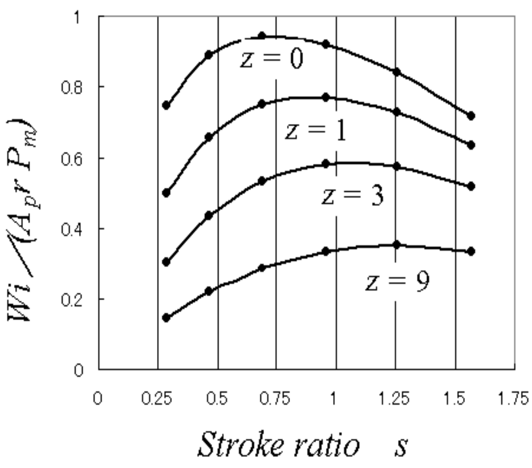

Fig.3-4 Indicated Work as a function of Stroke ratio (t=0.52 c=3)